MECANIQUE DU SOLIDE

Statique analytique

Dynamique en translation

Chapitre 5

EXERCICES

Feuille n°4

CORRECTION

EXERCICE 1 (éléments de cours à connaître par cœur)

a) Rappeler les équations du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) :

⇒ Théorème de la résultante dynamique : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ L'équation est vectorielle

⇒ Théorème du moment dynamique : $\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = I \cdot \alpha$ L'équation est algébrique mais c'est un cas particulier ; normalement, elle est vectorielle mais dans ce cas, l'inertie est une matrice appelée « matrice d'inertie » (hors programme).

Attention également à bien exprimer les moments au même point que celui utilisé pour le moment d'inertie ; bien souvent, c'est le centre de gravité G.

b) Que devient le PFD si les accélérations (linéaire et angulaire) sont nulles ? le PFD devient le PFS

⇒ Théorème de la résultante : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ L'équation est vectorielle

⇒ Théorème du moment : $\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$ L'équation est algébrique ; c'est suffisant pour traiter les problèmes qui sont les nôtres (problèmes plan). Si les problèmes ne sont pas plans, on préfèrera les traiter avec des torseurs.

Par définition, la statique est l'étude de l'équilibre des corps.

c) Un système à l'équilibre a donc :

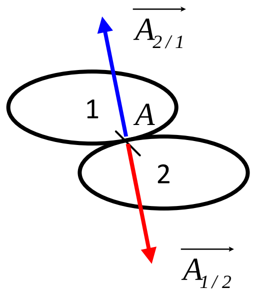
⇒ une vitesse linéaire : ☐ obligatoirement nulle ☑ possiblement nulle ☑ constante ☐ variable

⇒ une vitesse angulaire : ☐ obligatoirement nulle ☑ possiblement nulle ☑ constante ☐ variable

d) Rappeler les trois principales étapes pour mener une étude de dynamique (ou de statique) :

Etape 1 : dire ce qu'on isole ⇨ Etape 2 : faire le BAME ⇨ Etape 3 : appliquer le PFD (ou le PFS)

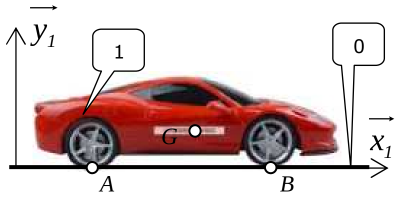
e) Expliquer ce qu'est le Principe des Actions Mutuelles (PAM) (faire une figure).



Soit deux solides (1) et (2). Si (1) exerce sur (2) une action $\overrightarrow{A_{1/2}}$ alors (2) exerce sur (1) une action $\overrightarrow{A_{2/1}}$ telle que $\overrightarrow{A_{2/1}} = -\overrightarrow{A_{1/2}}$; cette égalité implique que les forces $\overrightarrow{A_{1/2}}$ et $\overrightarrow{A_{2/1}}$ ont même direction, des sens opposés et des intensités égales.

f) Dire dans quelle étape il peut être nécessaire de mettre en œuvre le PAM : Le PAM, s'il intervient si nécessaire dans l'étape 2 (quand on fait le BAME).

EXERCICE 2



On considère une voiture (1) de masse $m = 1{,}2\,T$ à l'arrêt sur une route horizontale (0). On est sur terre avec $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

On donne en m les distances : $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \vec{x_1}$ et $\overrightarrow{AG} = 2{,}5 \cdot \vec{x_1} + 0{,}7 \cdot \vec{y_1}$.

a) Qu'est ce qui permet de dire qu'on est en statique et pas en dynamique ? L'énoncé dit « voiture à l'arrêt ». La voiture a donc une vitesse constante (nulle, certes, mais constante, donc pas d'accélération).

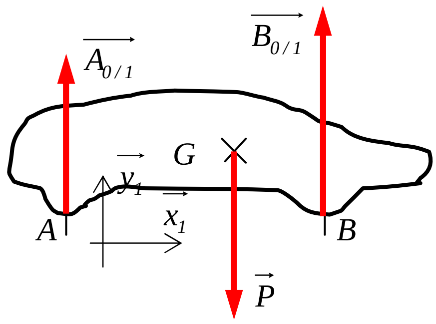
b) Calculer les réactions du sol sur la voiture (mettre en œuvre la méthode avec rigueur et précision).

Il s'agit d'enchaîner les trois étapes de la méthode :

Etape 1 : on isole la voiture *(il n'y a qu'elle qui puisse être isolée car le bâti, ici le sol (0), ne s'isole jamais)*

Etape 2 : BAME (3 forces)

*En statique analytique, **toujours faire un petit schéma du système isolé** avec le repère, les points importants, et on trace sans échelle particulière les forces (les AME donc).*



➲ Le poids :

Nom : $\vec{P}$ tout simplement, comme « poids » ; on pourrait l'appeler $\vec{P_1}$ parce que c'est le poids du solide (1), mais l'indice est inutile car aucune confusion n'est possible avec un autre poids (il n'y en a pas d'autre).

Point d'application : le centre de gravité G

Intensité : $P = m \cdot g = 1{,}2 \times 1000 \times 10 = 12000\ N$

Direction : le poids est toujours vertical donc ici, porté par l'axe $\vec{y_1}$

Sens : le poids est toujours vers le bas. Or, l'axe $\vec{y_1}$ est positif vers le haut donc la composante du poids sur l'axe $\vec{y_1}$ est négative

$$\vec{P}\left|\begin{matrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \end{matrix}\right|_{R1}$$

➲ L'action du sol (0) sur la voiture (1) au point A :

Nom : $\overrightarrow{A_{0/1}}$ car comme on isole (1), on prend l'action de (0) sur (1) et non celle de (1) sur (0) ; attention à ce détail qui n'en est pas un…

Direction : l'énoncé ne nous le dit pas, mais le contact au point A est ponctuel. L'action est alors portée par la perpendiculaire au plan de contact, c'est-à-dire la perpendiculaire au sol. Comme ce-dernier est horizontal, alors la force sera verticale, c'est-à-dire portée par l'axe $\vec{y_1}$.

Sens : on peut penser que la force va vers le haut, ça s'est l'intuition. Mais en fait, on n'en sait rien. On met donc notre intuition dans notre poche, et **le sens est inconnu**. Ce faisant, on le déclare positif (donc ici vers le haut) et, plus tard, quand on obtiendra des résultats numériques, on interprétera le signe : s'il est positif, c'est que le sens est bien vers le haut, s'il est négatif, c'est que la force va vers le bas… En résumé, on a ça :

$$\overrightarrow{A_{0/1}}\left|\begin{matrix} 0 \\ Y_{A0/1} \\ 0 \end{matrix}\right|_{R1}$$

➲ L'action du sol (0) sur la voiture (1) au point B :

Par analogie avec tout ce qui a été dit pour l'action au point A, on a, au point B :

$$\overrightarrow{B_{0/1}}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{B0/1} \\ 0 \end{vmatrix}_{R1}$$

Remarquons enfin que les vecteurs $\vec{P}$, $\overrightarrow{A_{0/1}}$ et $\overrightarrow{B_{0/1}}$ ont été explicitement exprimés dans le repère $\Re_1$ (en indice en bas à droite de chaque expression) ; on peut se passer de cette précision (dans les écritures) car dans le problème c'est le seul et unique repère dont on a besoin et qui est donné. Donc, pour le BAME, on peut écrire simplement :

$$\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{A_{0/1}}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{A0/1} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{B_{0/1}}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{B0/1} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le BAME est terminé ; on remarque la présence de deux inconnues algébriques : $Y_{A0/1}$ et $Y_{B0/1}$. Ce sont les deux seules du problème. Il nous faudra donc deux équations pour les trouver, et c'est le PFD (le PFS ici) qui va nous les donner…

Etape 3 : on applique le PFD, ici le PFS car pas d'accélération

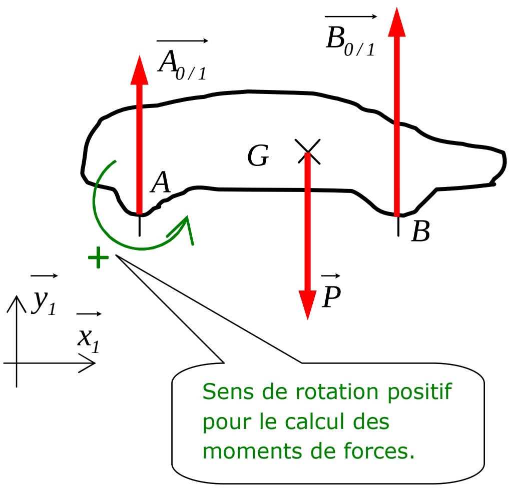
Le plus pratique est de commencer par le théorème du moment car il est susceptible de trouver tout de suite une inconnue qu'on n'aura pas à traîner dans les calculs (mais ce n'est pas une obligation !)

Théorème du moment en A : *on choisit le point A car il y a une inconnue en ce point ($Y_{A0/1}$) et, on va le voir dans le calcul, cette inconnue disparaît car multipliée par zéro. On aurait pu prendre le point B pour la même raison.*

La formule du théorème du moment est $\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)=0$.

Il faut donc sommer (additionner) les moments des forces extérieures et dire que cette somme est nulle.

<u>Attention</u> : le moment d'une force par rapport à un point peut être > 0 ou < 0. Son signe dépend du sens dans lequel la force dont on calcule le moment ferait tourner le système. Soit positivement (et le moment est positif), soit négativement (et le moment est négatif). Quant au sens positif, on peut le définir arbitrairement ; on le matérialise sur le petit schéma précédent avec un arc de cercle orienté…



Recherchons maintenant le moment des forces :

$$M_A\left(\overrightarrow{A_{0/1}}\right)=0\times Y_{A0/1}=0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{B_{0/1}}\right)=3\times Y_{B0/1}$$

$$M_A\left(\vec{P}\right)=-2{,}5\times 12000=-30000\ N\cdot m$$

Le moment de chacune des trois forces est calculé ; appliquons maintenant la formule :

$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)=0$$
$$M_A\left(\overrightarrow{A_{0/1}}\right)+M_A\left(\overrightarrow{B_{0/1}}\right)+M_A\left(\vec{P}\right)=0$$
$$0+3\times Y_{B0/1}-30000=0$$

On a une seule inconnue dans cette équation ; on peut donc la résoudre, c'est-à-dire trouver l'inconnue :

$$Y_{B0/1}=\frac{30000}{3}=10000\ N$$

Interprétation du signe : $Y_{B0/1}>0 \quad \Rightarrow \quad Y_{B0/1}$ est bien vers le haut (comme supposé au moment du BAME)

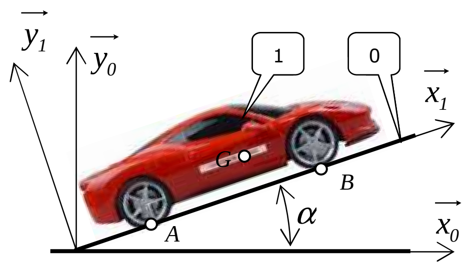
L'utilisation du théorème du moment est terminée ; on passe maintenant au théorème de la résultante :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{A_{0/1}}+\overrightarrow{A_{0/1}}+\vec{P}=\vec{0}$$
$$\begin{vmatrix}0\\Y_{A01}\\0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\10000\\0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\-30000\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$
$$Y_{A01}=20000\ N$$

Interprétation du signe : $Y_{A0/1}>0 \quad \Rightarrow \quad Y_{A0/1}$ est bien vers le haut (comme supposé au moment du BAME)

EXERCICE 3

La voiture (1) est en contact aux points A et B avec la route (0) inclinée d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale.



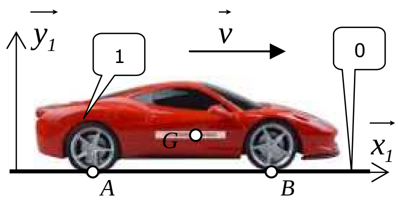
La voiture est à l'arrêt.

On admettra que les contacts au sol en A et B sont maintenu à chaque instant et que la voiture ne glisse pas.

a) Déterminer les actions mécaniques que subit la voiture au niveau des contacts sol/roues si c'est l'essieu arrière qui est bloqué.

b) Déterminer les actions mécaniques que subit la voiture au niveau des contacts sol/roues si c'est l'essieu avant qui est bloqué.

EXERCICE 4



La voiture se déplace à vitesse constante $\vec{v}$. L'essieu arrière est moteur (la voiture est une « propulsion » et non une « traction »). On néglige la perte de masse due à la consommation du carburant. La résistance de l'air est considérée ; température de l'air : $T_{air} = 20\,°C$; coefficient de traînée de la voiture : $C_x = 0{,}55$ et surface maître-couple : $S = 1{,}7\ m^2$. Régime d'écoulement de l'air sur la voiture : turbulent. On admettra que la force de résistance est horizontale et passe par le centre de gravité G.

a) Qu'est ce qui permet de dire qu'on est en statique et pas en dynamique ?

l'énoncé dit « vitesse constante » donc accélération nulle donc on est en statique.

b) Calculer en N l'intensité R de la résistance de l'air $\vec{R}$ pour les vitesses données.

Régime turbulent => $R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2$ avec $\rho = 1204\ kg \cdot m^{-3}$ pour l'air à 20°C.

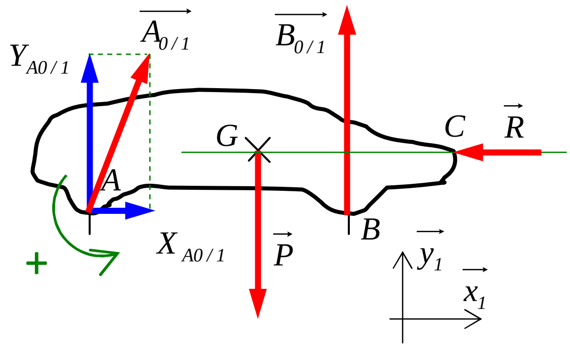
$$R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}204 \times 1{,}7 \times 0{,}55 \times v^2 = 0{,}563 \cdot v^2$$

On va utiliser cette formule pour remplir la ligne $R\,(N)$ du tableau...

$v\,(km \cdot h^{-1})$	0	20	40	60	80	100	120	140	160
$v\,(m \cdot s^{-1})$	0	5,55	11,1	16,7	22,2	27,8	33,3	38,9	44,4
$R\,(N)$	0	17,3	69,4	157	277	435	624	852	1110
$X_{A0/1}\,(N)$	0	17,3	69,4	157	277	435	624	852	1110
$Y_{A0/1}\,(N)$	12000	12004	12016	12037	12065	12101	12145	12199	12259
$Y_{B0/1}\,(N)$	10000	9996	9984	9963	9535	9899	9855	9801	9741

c) Mener l'étude dynamique afin d'établir les équations donnant l'expression de $X_{A0/1}$, $Y_{A0/1}$ et $Y_{B0/1}$ en fonction de R.

« Mener l'étude dynamique », ça veut dire mettre en œuvre la méthode avec les trois étapes…



ETAPE 1 : on isole la voiture

ETAPE 2 : BAME (4 forces, en A, en B et en G)

En A : on retrouve la composante $Y_{A0/1}$ comme à l'exercice précédent mais, attention, l'énoncé précise que la voiture est une propulsion ; donc, au point A, il y a une force sur l'axe $\overrightarrow{x_1}$, c'est la composante $X_{A0/1}$.

Tout ceci donne : $\overrightarrow{A_{0/1}}\begin{vmatrix} X_{A0/1} \\ Y_{A0/1} \\ 0 \end{vmatrix}$

En B : la roue se contente de rouler ; on a : $\overrightarrow{B_{0/1}}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{B0/1} \\ 0 \end{vmatrix}$

En G : le poids : $\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \end{vmatrix}$

En C : la force issue de la résistance de l'air ; elle s'oppose au mouvement elle est donc porté par l'axe $\overrightarrow{x_1}$ et est orientée négativement

On a : $\vec{R}\begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$,

Le BAME est terminé ! On remarque qu'il y a trois inconnues : $X_{A0/1}$, $Y_{A0/1}$ et $Y_{B0/1}$.

ETAPE 3 : PFS

Théorème du moment en A :

$$M_A\left(\overrightarrow{A_{0/1}}\right) = 0 \times X_{A0/1} + 0 \times Y_{A0/1} = 0$$

$$M_A\left(\overrightarrow{B_{0/1}}\right) = 3 \times Y_{B0/1}$$

$$M_A\left(\vec{R}\right) = 0{,}7 \times R$$

$$M_A\left(\vec{P}\right) = -2{,}5 \times 12000 = -30000\ N \cdot m$$

$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)=0$$
$$M_A\left(\overrightarrow{A_{0/1}}\right)+M_A\left(\overrightarrow{B_{0/1}}\right)+M_A\left(\vec{R}\right)+M_A\left(\vec{P}\right)=0$$
$$0+3\times Y_{B0/1}+0{,}7\times R-30000=0$$
$$Y_{B0/1}=10000-0{,}233\cdot R$$

➔ On a l'équation de $Y_{B0/1}$ en fonction de R

Théorème de la résultante :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{A_{0/1}}+\overrightarrow{B_{0/1}}+\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$$
$$\begin{vmatrix} X_{A01} \\ Y_{A01} \\ 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 \\ 10000-0{,}233\cdot R \\ 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Equation de projection sur $\overrightarrow{x_1}$:

$$X_{A01}=R$$

➔ On a l'équation de $X_{A0/1}$ en fonction de R

Equation de projection sur $\overrightarrow{y_1}$:

$$Y_{A01}+10000-0{,}233\cdot R-12000=0$$
$$Y_{A01}=12000+0{,}233\cdot R$$

➔ On a l'équation de $Y_{A0/1}$ en fonction de R

d) Compléter le tableau.

Avec les formules $X_{A01}=R$, $Y_{A01}=12000+0{,}233\cdot R$ et $Y_{B0/1}=10000-0{,}233\cdot R$, On peut remplir le tableau…

e) Rechercher la vitesse v_{max} à partir de laquelle la voiture commencerait à se cabrer.

La voiture se cabre implique que la roue avant décolle ; ceci correspond à $Y_{B0/1}=0$ (le contact en B est rompu, il n'y a plus d'effort en ce point)

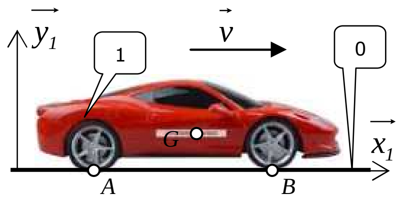
$$Y_{B0/1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 10000-0{,}233\cdot R=0 \quad\Leftrightarrow\quad R=\frac{10000}{0{,}233}=42918\ N$$

Et comme on a $R=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot C_x\cdot v^2$, on en déduit la vitesse :

$$R=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot C_x\cdot v^2 \quad\Leftrightarrow\quad v=\sqrt{\frac{2\cdot R}{\rho\cdot S\cdot C_x}}=\sqrt{\frac{2\times 42918}{1{,}204\times 1{,}7\times 0{,}55}}=276\ m\cdot s^{-1}\equiv 994\ km\cdot h^{-1}.$$

Autant dire que la voiture ne devrait jamais se cabrer…

EXERCICE 5



La voiture est considérée en phase d'accélération sur une route horizontale.

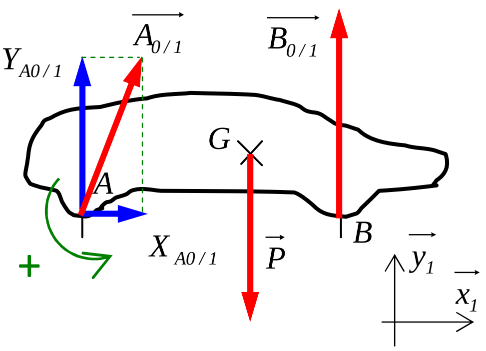
Avec un accéléromètre embarqué, on mesure $a = 3\, m \cdot s^{-2}$.

On néglige la résistance de l'air ainsi que la perte de masse due à la consommation du carburant.

a) Qu'est ce qui permet de dire qu'on est en statique et pas en dynamique ? on a une accélération

b) Calculer en N la force de propulsion que les roues motrices engendrent.

ETAPE 1 : On isole la voiture



ETAPE 2 : BAME (4 forces)

$$\overrightarrow{A_{0/1}}\begin{vmatrix} X_{A0/1} \\ Y_{A0/1} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{B_{0/1}}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_{B0/1} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a trois inconnues : $X_{A0/1}$, $Y_{A0/1}$ et $Y_{B0/1}$.

Mais seule $X_{A0/1}$ nous intéresse car c'est la force de propulsion qui est demandée.

ETAPE 3 : PFD

Théorème de la résultante :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$$

$$\overrightarrow{A_{0/1}} + \overrightarrow{B_{0/1}} + \vec{P} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$$

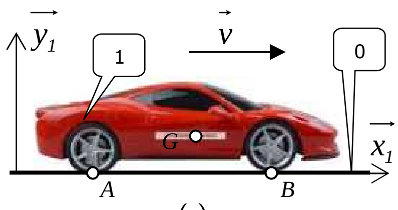
$$\begin{vmatrix} X_{A01} \\ Y_{A01} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{B01} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

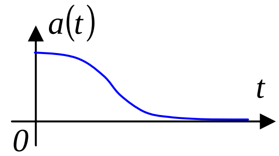
Equation de projection sur $\overrightarrow{x_1}$:

$$X_{A01} = m \cdot a_x = 1200 \times 3 = 3600\ N$$

Inutile d'aller plus loin, on nous demandait simplement la force de propulsion, et on l'a.

EXERCICE 6





La voiture est considérée en phase d'accélération sur une route horizontale. Avec un accéléromètre embarqué, on mesure l'accélération et on se rend compte qu'elle est variable au cours du temps ; soit $a(t)$ cette accélération, son allure est donnée ci-contre.

On néglige la perte de masse due à la consommation du carburant mais on prend en compte la résistance de l'air ; on considère un régime d'écoulement de l'air turbulent.

a) Qu'est ce qui permet de dire qu'on est en statique et pas en dynamique ? accélération non nulle

b) Appliquer le PFD pour établir l'équation qui gère la dynamique de la voiture.

La méthode….

ETAPE 1 : On isole la voiture

ETAPE 2 : BAME mais, ici on fait simple en limitant les choses à l'axe $\vec{x_1}$. Pourquoi ? Parce que la force de propulsion est portée par l'axe $\vec{x_1}$ et la résistance de l'air aussi.

Donc, sur l'axe $\vec{x_1}$, on a :

La force de propulsion F et la résistance de l'air R ; attention quand même aux signes : ils sont opposés !

ETAPE 3 : PFD sur l'axe $\vec{x_1}$ uniquement

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$$

$$F - R = m \cdot a_G$$

Or, $R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{F - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 = m \cdot a_G}$

c) Expliquer en quoi cette équation est différentielle.

Il faut se rappeler de la cinématique et en particulier des relations liant la position $x(t)$, la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$; on a : $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ et $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Ainsi, l'équation issue du PFD donne : $F - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Qu'on peut écrire comme ceci : $\boxed{m \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \dot{x}^2 = F}$

On voit que dans une seule et même équation, on a la dérivée première $\dot{x}$ d'une fonction $x(t)$ et aussi sa dérivée seconde $\ddot{x}$; il s'agit de ce qui s'appelle en mathématique une <u>équation différentielle</u>…